

Ingo Rath

Lehrzielbezogene Planung und Durchführung des  
Mathematikunterrichts

1. Ein kognitionspsychologisches Modell des Unterrichtens

Die Schule ist von der Institution her jener Ort, am dem a) systematisches, b) geplantes und c) zielerreichendes Lernen stattfinden soll. Lernen selbst ist ein internal ablaufender Prozeß, der Veränderungen im Persönlichkeitskonstrukt der Schüler bewirkt. Dabei wird das Persönlichkeitskonstrukt von einem Ausgangszustand a durch Lernprozesse der Schüler  $L_S$  in einen Zielzustand z transformiert (Abb. 1). Der Schüler kann etwas, was er zuvor noch nicht gekonnt hatte, z.B. Lösen von Gleichungen der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  mit reellen Zahlen a, b und c.

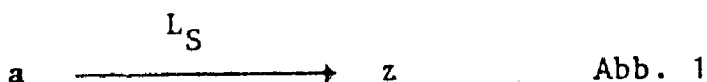


Abb. 1

Der Zielzustand z kann durch Lehrziele beschrieben werden. Die Faktoren des Ausgangszustandes a bestimmen die Lernvoraussetzungen für die Erreichung des Zielzustandes z. Sie können analog den Lehrzielen formuliert werden. "Die Feststellung und Berücksichtigung aller für die Erreichung eines Lehrzieles relevanten Lernvoraussetzungen stellt für den Lehrer ein kaum lösbares Problem dar, zumal neben systematisch geplantem Lernen auch latentes Lernen stattfindet. Auch die Tatsache, daß zwischen Lernvoraussetzungen und Lehrzielen ein hierarchischer Zusammenhang besteht, löst das Problem nur teilweise (RATH 1983 6)".

Jedenfalls können Veränderungen im Persönlichkeitskonstrukt der Schüler als Ziele des unterrichtlichen Handelns angesehen werden. Die Ausgangssituation des unterrichtlichen Handelns selbst ist durch diverse Rahmenbedingungen, wie Lehrpläne, Verordnungen u.a. weitgehend festgelegt.

Unter Berücksichtigung des empirisch gesicherten Zusammenhanges zwischen unterrichtlichem Handeln und Lernprozessen bei den Schülern, fassen wir die Überlegungen in einem Modell zusammen:

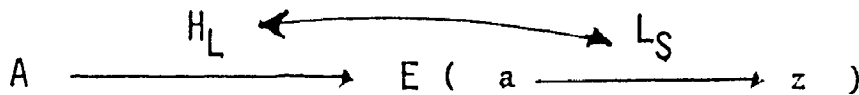


Abb. 2 Kognitionspsychologisches Modell des Unterrichts  
(RATH 1983 &)

- A ... Ausgangssituation bei der Planung und Durchführung des Unterrichts. Sie ist durch die Lehrpläne, die Verordnungen, die Rahmenbedingungen der Schule u.a. weitgehend vorbestimmt.
- E ... Erwünschter Endzustand, der sich auf Veränderungen im Persönlichkeitskonstrukt bei den Schülern bezieht.
- $H_L$  ... Transformation von A in E durch unterrichtliche Handlungen

In dem dargestellten Modell sind die Ausprägungsgrade von z und a (wenigstens theoretisch) der unmittelbaren Beobachtung zugänglich, ebenso der diachrone Handlungsablauf  $H_L$  im Unterricht. Nicht unmittelbar beobachtet werden können der Steuerungsmechanismus des Handlungsablaufes  $H_L$ , die internal ablaufenden Lernprozesse  $L_S$  und die Denkprozesse der Schüler beim Bewältigen von Aufgaben, die den Zielzustand z bestimmen.

An Hand des vorgestellten Modelles ergeben sich die folgenden Planungselemente:

- (1) Feststellen der Forderungen des Lehrplanes einschließlich der schulischen Rahmenbedingungen
- (2) Feststellen der Lernvoraussetzungen der Schüler
- (3) Festlegen und Präzisierung der gewünschten Lehrziele
- (4) Ermitteln der unterrichtlichen Handlungen, die die entsprechenden Lernprozesse bei den Schüler initiieren.

Die Unterrichtsplanung bezieht sich auf alle Tätigkeiten, die das unterrichtliche Handeln zum Gegenstand haben und dieses in einem Approximationsprozeß optimiert.

Natürlich ist zu bedenken, daß jeder Plan irgendwie "falsch" sein muß, weil man nicht alle Bedingungen für das Lernen voraussehen kann. "Starre Planung und Planlosigkeit sind gleichermaßen unbrauchbar" (COHN 1975, S.206).

An dieser Stelle fordert Ruth Cohn weiters: "Vorplanen mit allen bekannten Fakten und Wahrscheinlichkeiten und Offen-Sein für Wahrnehmungen im Hier- und - jetzt des Prozesses, um notwendige Umstellungen vornehmen zu können."

## 2. Mögliche Ausgangssituationen beim Unterrichten

Das konkrete unterrichtliche Handeln hat alle Anzeichen eines Problemlösungsprozesses. Für den Unterrichtenden stellt sich das Problem, einen diachronen Handlungsablauf zu finden, der einen gegebenen Anfangszustand A in einen erwünschten Endzustand E transformiert (Abb. 2). Problemsituationen können nach den Dimensionen "Bekanntheitsgrad der Mittel" und "Klarheit der Ziel-situation" klassifiziert (DÖRNER 1979, S.14) werden.

Die Klarheit des Endzustandes ist hoch, wenn die Lernvoraussetzungen und die Lehrziele geklärt und präzisiert sind. Da der Endzustand E in unserem kognitionspsychologischen Modell durch die Lernvoraussetzungen und die Lehrziele beschrieben wird, ergibt sich eine Unterteilung des Klarheitsgrades für E in vier Bereiche (Abb.3).

		KLARHEIT DER LERNVORAUSSETZUNGEN	
		hoch	gering
KLARHEIT DER LEHRZIELE	hoch	E(hh)	E(hg)
	gering	E(gh)	E(gg)

Abb. 3

Der Fall E(gh) ist für uns irrelevant, da geringe Klarheit der Lehrziele sicher nicht hohe Klarheit der Lernvoraussetzungen nach sich ziehen kann, da diese im Hinblick auf das erwünschte Lehrziel hin ermittelt werden.

Anders verhält es sich beim Fall E(gg). Allgemeine Bildungsziele haben eine relativ geringe Klarheit und ziehen eine ebenso geringe Klarheit der Lernvoraussetzungen nach sich.

Der Fall E(hg) (Abb. 3) dürfte der unterrichtsrelevanteste sein. Der Fall E(hh) wäre der Idealzustand. Es ist nicht auszuschließen, daß dieser im Mathematikunterricht manchmal erreicht wird. Jedenfalls kann er durch eine gediegene Unterrichtsplanung annähernd zustandekommen.

Der Bekanntheitsgrad der Mittel zur Findung eines diachronen Handlungsablaufes  $H_1$  bezieht sich auf bestimmte Verhaltensweisen, Verhaltensmuster oder Lehrerfertigkeiten (skills), d.h. auf "punktuelle Situationen", wie Fragen stellen oder Eingehen auf Schülerreaktionen, oder auf "komplexere Situationen" (BECKER & CLEMENS-LODE & KOHL 1980), wie Erklären eines Sachverhaltes, Organisieren einer Gruppen- oder Partnerarbeit und Reaktivieren von Vorwissen, aus denen sich der diachrone Handlungsablauf zusammensetzt.

Der Bekanntheitsgrad der Mittel für den Handlungsablauf  $H_1$  ist hoch, wenn die Menge der einzelnen Handlungen für den diachronen Ablauf bekannt und einsetzbar sind. Der Bekanntheitsgrad ist gering, wenn die richtigen Handlungen erst gefunden werden müssen. "Hauptaufgabe ist hier die Zusammenstellung oder Synthese eines brauchbaren Inventars" (DÖRNER 1979, S.12) von Handlungen.

Damit ergeben sich folgende Unterrichtsausgangssituationen (RATH 1983 6):

		BEKANNTHEITSGRAD DER MITTEL FÜR $H_1$	
		hoch	gering
KLARHEIT DER ZIELKRITERIEN FÜR E	E(hh)	U(hhh)	U(hhg)
	E(hg)	U(hgh)	U(hgg)
	E(gg)	U(ggh)	U(ggg)

Abb. 4 Unterrichtsausgangssituationen

In der Unterrichtsausgangssituation  $U(ijk)$  gibt an:

- i den Klarheitsgrad der Lehrziele
- j den Klarheitsgrad der Lernvoraussetzungen
- k den Bekanntheitsgrad der Mittel für den unterrichtlichen Handlungsablauf

U(hhh) scheint die günstigste Ausgangssituation für den Unterricht zu sein. Der Lehrer hat klare und präzise Lehrziele, er kennt die Lernvoraussetzungen und hat alle "Mittel" zur Kombination des diachronen Handlungsablaufes zur Verfügung.

Die Ausgangssituationen U(hgh) und U(ggh) können deswegen gegeben sein, weil erstens noch kein praktikables Instrumentarium zur Feststellung der Lernvoraussetzungen und Präzisierung der Lehrziele vorhanden ist. Die Herstellung solcher

Instrumentarien wäre eine wichtige Aufgabe der Didaktik. Zweitens wegen mangelhafter Kompetenz der Lehrer, besonders in Richtung fachlicher Kenntnisse. Hier liegt einer der Ansatzpunkte für die Kompetenzerweiterung, die in der Lehrerfortbildung erreicht werden sollte.

Bei den Ausgangssituationen U(hhg) und U(hgg) liegt der Fall ähnlich. Zum einen, es können die Mittel zur Erreichung des Lehrzieles nicht oder nur ungenügend bekannt sein, eben die Mittel, die die entsprechenden Lernprozesse bei den Schülern in Gang setzen. In diesem Falle liegt eine Aufgabe der Didaktik der Mathematik darin, solche Mittel zu erforschen. Zum zweiten wäre die fehlende Kompetenz in Richtung methodischer Fähigkeiten zu erweitern.

Offensichtlich stellt die Ausgangssituation U(ggg) eine Kumulation der aufgezeigten Schwierigkeiten dar. Wahrscheinlich stehen nicht wenige Lehrer am Beginn ihrer beruflichen Laufbahn vor dieser Unterrichtsausgangssituation. Auch Lehrer, die in den "Tag hinein" unterrichten, stehen vor dieser Situation.

### 3. Lehrziele als mehrdimensionale Beziehungsgefüge

Aufgabe der Schule ist es, den heranwachsenden Menschen in seiner Persönlichkeitsentwicklung zu fördern und zu unterstützen. Der Schüler soll dabei eine dreifache Kompetenz erreichen (RATH 1983 a):

- (1) Selbstkompetenz, z.B. seine Empfindungen und Gefühle akzeptieren und mit ihnen leben lernen; über sich selbst nachdenken und sich über seine Werte und Interesssssen Klarheit verschaffen.
- (2) Sozialkompetenz, z.B.: erkennen, daß soziale Beziehungen zu Verpflichtungen führen; fähig sein, Konflikte zu erkennen und Lösungen ohne Gewaltanwendung zu suchen, die von allen Beteiligten akzeptiert werden können.
- (3) Sachkompetenz, z.B: Sachverhalte verstehen und mit ihnen umgehen können; sich das vom Lehrplan verlangte Wissen und Können aneignen.

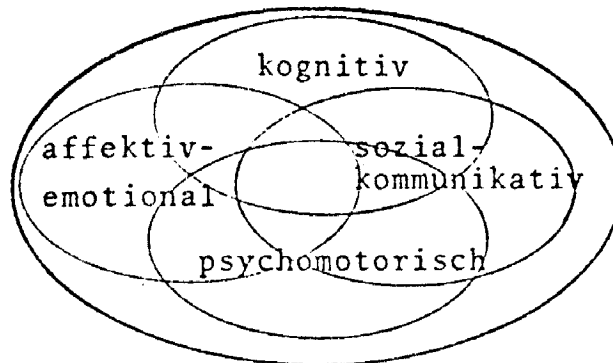
Um diese Aufgabe erfüllen zu können, werden unter anderem (a) kognitive, (b) psychomotorische, (c) affektiv-emotionale und (d) sozial-kommunikative Lehrziele formuliert und deren Realisierung im Unterricht lehrplanmäßig gefordert.

Obwohl in den österreichischen Lehrplänen alle vier oben angeführten Lehrzielbereiche angesprochen werden, steht doch in unseren Schulen die Vermittlung des Lehrstoffes im Vordergrund, der affektiv-emotionale und der sozial-kommunikative Lehrzielbereich wird meistens nur so nebenbei mitverfolgt, da deren Realisierung im Unterricht gar nicht so leicht ist und zudem die Lehrer hierzu nur ungenügend ausgebildet sind.

"Die punktuelle und isolierte Heraushebung eines der Lehrzielbereiche ist für mich keine Lösung, denn dabei wird vielfach übersehen, daß der Mensch eine Ganzheit ist und nicht in kognitive, psychomotorische, affektiv-emotionale, sozial-kommunikative und andere Komponenten zerlegt werden kann, die isoliert trainiert zur Persönlichkeitsentwicklung beitragen - nach gestaltpsychologischen Gesetzen ist das Ganze mehr als die Summe der Teile.

Jedes Lehrziel besteht für mich aus einem mehrdimensionalen zusammenhängenden Beziehungsgefüge von einander übergreifenden Komponenten die aus den vier oben angeführten Bereichen entnommen sind. Abb. 5 deutet diese mehrdimensionale Vernetztheit an.

Abb. 5 Lehrziel als mehrdimensionales Beziehungsgefüge



Beim Erlernen der Konstruktion "Schwerpunkt des Dreiecks" (6. Schulstufe) werden neben kognitiven und psychomotorischen Komponenten, die Verspeicherung des Konstruktionsablaufes und dessen manuelle Ausführung mit den Zeichengeräten, auch affektiv-emotionale und sozial-kommunikative Komponenten miteinbezogen. So hat der momentane emotionale Zustand des Schülers - Motivation, Lust, Unlust, Freude, Mißbehagen u.a. - und der sozial-kommunikative Aspekt - die Art der Vermittlung durch den Lehrer oder seine Mitschüler, das soziale Klima u.a. - Einfluß auf das Lernergebnis. Und genau diese Aspekte werden bei der Wiedererinnerung des Konstruktionsverfahrens mitreproduziert und bestimmen so zukünftiges Verhalten. Lernt der Schüler den Konstruktionsablauf unter Angstgefühlen, so kann dieses Angstgefühl bei späteren Wiederausführungen dieser Konstruktion entstehen und das weitere Lernen von Mathematik beeinflussen. Ein wahrer Teufelskreis, der hier beginnen kann, wird er nicht vom Lehrer erkannt und unterbrochen (RATH 1983 c)".

Sind die Lehrziele als mehrdimensionales Beziehungsgefüge festgelegt, so sind Lernaufgaben als handlungsstimulierende Situationen zu entwickeln, um die Schüler zu Aktivitäten anzuregen, die sie zu bestimmten den Lehrzielen entsprechenden Lernerfahrungen führen. Wesentlich bei einer Lernaufgabe ist, daß die Schüler eine gewisse Zeit ohne direkte Steuerung des Lehrers handeln können (müssen). Bei einer Lernaufgabe wird nicht nur der kognitive Inhalt sondern auch die Sozialform (Gruppe - Einzel - Klasse) und das Lehrverfahren (entdeckenlassend, darbietend, genetisch usw.) festgelegt.

Im kognitiven Bereich können in der Mathematik drei Grundtypen als Zielkomponenten von Lernaufgaben unterschieden werden (RATH 1983 b):

- (1) Wissen (Begriffe, Vorstellungen, Handlungswissen)
- (2) Intellektuelle Techniken (Methoden und Verfahren)
- (3) Kognitive Strategien (Problemlösungsfähigkeit, Heuristiken u.a.)

#### 4. Heuristisches Schema für die Planung und Durchführung des Unterrichts

Im folgenden stelle ich ein heuristisches Schema vor, das für mich die Grundlage der Planung und Durchführung meines Unterrichtes darstellt. Bezüglich dieses heuristischen Schemas weise ich darauf hin, daß es zunächst nur für mich

Gültigkeit besitzt, daß sich jeder selbst ein Schema zurechtlegen muß und daß dieses Schema eine von mehreren Möglichkeiten darstellt. Die sechs angeführten Punkte des Schemas dürfen auch nicht für sich isoliert gesehen werden, sie bilden im unterrichtlichen Ablauf eine Einheit, die Übergänge sind fließend.

- (1) Einstimmung auf mich, die Schüler und die Umgebung

Etwa fünf Minuten vor Beginn des Unterrichtes stelle ich mir einige Fragen und versuche, diese für mich zu beantworten.

Mögliche Fragen:

- Wie war für mich die letzte Stunde in der Klasse ?
- Wie war diese Stunde für mich ?
- Wie wirkt der Raum, die Umgebung, das Wetter udgl. auf mich ?
- Wie klar bin ich über das, was ich will ? Was will ich nicht ?
- Welche Motive habe ich ?
- Bin ich mir über die Beziehungen zu den Schülern klar ?
- Kann ich die vorbereiteten Materialien einsetzen ?
- Wo sind meine Leerstellen im Plan, wo bin ich offen, wo sind Änderungen im Ablauf der Stunde möglich ?

- (2) Wachstumförderndes Lernklima schaffen bzw. reaktivieren

Es gilt " im Unterricht ein freies wachstumförderndes Lernklima zu schaffen, das durch Akzeptieren von Verschiedenartigkeit, Echtheit der einzelnen Menschen, Einfühlungsvermögen und gemeinsame Bewältigung von Aufgaben und Konflikten gekennzeichnet ist. Dieses Lernklima kann nicht verordnet werden, es muß sich entwickeln, es



muß wachsen unter Wahrung der Identität der einzelnen Persönlichkeiten. Es ist unter anderem durch schülerbezogene Unterrichtsmethoden gekennzeichnet, bei denen nicht die Einweginformation Lehrer-Schüler im Sinne von Darbieten und Aufnehmen im Vordergrund steht, sondern die selbständige Erarbeitung und Verarbeitung unter der Hilfestellung der Lehrer (RATH 1983 a, S.8 und RATH 1981, S.24/25). Ein solches wachstumsförderndes Lernklima zu schaffen bedarf einer längerfristigen Planung, ist aber ein solches Klima in einer Klasse entstanden, gilt es dieses in der Unterrichtsstunde zu reaktivieren. Dazu können verschiedene aktuelle Anlässe dienen. Sehr oft gehe ich auf das Befinden der Schüler ein, das von der vorangegangenen Stunde abhängen kann. Manchmal nehme ich mir auch Zeit, dem Erziehungsauftrag der Schule gerecht zu werden, um Probleme zu behandeln, die die Schüler bewegen. Auch das Weltgeschehen und andere politische Ereignisse kommen zur Sprache. So konnte ich beispielsweise am Tag nach der Ermordung des ägyptischen Präsidenten Sadat in einer Maturaklasse nicht so ohne weiteres zur Tagesordnung übergehen, ohne sich Gedanken über die Tragweite dieses Ereignisses zu machen. Ein anderes Mal lasse ich den Ablauf der letzten Stunde wiederholen. Auch die Hausübung besprechen und über Beispiele zu diskutieren, bietet eine Möglichkeit, das wachstumsfördernde Lernklima zu reaktivieren.

### (3) WAS - WIE - WARUM

In einem nächsten Schritt gebe ich Ziele und Thema vor und versuche auch zu begründen, warum dieses Thema wichtig ist. Die Begründung auf solche Sinnfragen zu geben, ist kein leichtes Unterfangen. Ich behelfe mich dabei des öfteren, indem ich meinen persönlichen Bezug zum Thema herstelle und meine Erfahrungen darstelle, die ich dazu gemacht habe.

Weiters gebe ich den geplanten Ablauf der Stunde bekannt und versuche einen emotionalen Sachbezug der Schüler zum Thema herzustellen. Hier sollen die bereits gemachten Lernerfahrungen zum Thema aktualisiert und aufgegriffen werden.

An dieser Stelle lasse ich auch Zielveränderungen und Änderungen im Ablauf der Stunde einfließen, wenn sie von den Schülern gewünscht werden.

#### (4) Lernerfahrungen sammeln

Bei der Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung durch Fremd- und Selbststeuerung bevorzuge ich je nach Lehrzielniveau

- (a) das nachvollziehende Lehrverfahren
- (b) das entdeckenlassende Lehrverfahren.

Beim nachvollziehenden Lehrverfahren werden neue Begriffe und neue intellektuelle Techniken in die bereits vorhandene kognitive und emotionale Struktur integriert und mit den vorangegangenen Lernerfahrungen vernetzt. Diese Vernetzung braucht Zeit. Daher schlage ich folgenden Dreischritt vor:

- Informationsinput durch den Lehrer
- Selbständige Informationsverarbeitung an Hand von Lernaufgaben in Gruppen-, Partner oder Einzelarbeit
- Anwendung des Wissens und Könnens (Vernetzung)

Bei der selbständigen Informationsverarbeitung durch die Schüler können Informationsmängel und Lernschwierigkeiten leicht behoben werden. Auch eine Differenzierung nach Lehrzielen ist leicht möglich. Beim entdeckenlassenden Lehrverfahren geht es um die Strukturierung und die Neuschöpfung von epistemischen Wissen und Können und dabei um den Aufbau von Heuristiken und Metaplänen, d.h. um die Entwicklung der Problemlösefähigkeit. In Lernaufgaben werden den Schüler Probleme gestellt, die sie in Gruppen- Partner- oder Selbstarbeit bewältigen haben. Dabei sollen die Schüler das Lösungsverfahren für das Problem selbst entdecken. Natürlich kann der Lehrer bei Lernschwierigkeiten durch individuelle Hilfestellungen die Problemschwierigkeit heruntertransformieren, was bis zum reinen Nachvollzug gehen kann.

Die Beispiele im nächsten Abschnitt beziehen sich vor allem auf den hier diskutierten Punkt "Lernerfahrungen sammeln".

#### (5) Feedback - Lernen lernen

Hier versuche nachfolgende Fragen zu stellen und mit den Schüler zu klären:

- Wurde das Ziel der Stunde erreicht ? Was hast du gelernt ?
- Wo mußt du noch weiterarbeiten ? Aus der Beantwortung dieser Frage ergibt sich die Hausübung, die auch individuell gestellt werden kann.
- Wo liegen deine Grenzen, Entwicklungsmöglichkeiten bei diesem Thema
- Hat das Thema neue Interessen geweckt ? Was möchtest du noch wissen, erfahren und lernen ?

- Wie war für dich diese Stunde ?
- Was bedeutet für dich das Gelernte ?

Beim entdeckenlassenden Lehrverfahren lasse ich über den Lernprozeß und den Gruppenprozeß, reflektieren. Durch die Beantwortung der Frage "Wie ist die Lösung zustande gekommen?" läßt sich manchmal ein Heurismus heraus Schälen und bewußt machen.

#### (6) Ausblick

Dieser Punkt hängt mit den vorangegangenen Punkt eng zusammen. Hier versuche ich, gemeinsam mit den Schülern neue Fragen und Ziele zu formulieren und damit gemeinsam neue Lernschritte für die nächste Stunde zu planen. Damit wird Punkt (3) des heuristischen Schemas für die nächste Stunde geklärt.

Manchmal kann das Gelernte noch in einen größeren Bezugsrahmen gestellt und damit die Sinnfrage "Warum muß das gelernt werden ?" etwas untermauert werden.

### 5. Unterrichtsbeispiele - Unterrichtsentwürfe zum Lehrplaninhalt

#### "Lineare Gleichungen mit zwei Variablen"

Zunächst die Lehrziele und die Lernvoraussetzungen:

Lehrziel: Das Beziehungsgefüge "lineare Gleichung mit zwei Variablen-Grundmenge - Lösungsmenge verstehen

Strukturierung dieses Lehrzieles:

A<sub>1</sub> : Sachverhalte in Gleichungen der Form  $ax+by=c$  übersetzen und Lösungspaare (x/y) ermitteln.

Grundmengen:  $N \times N$  und  $Z \times Z$

Sachverhalte: Alters - und Zahlenbeziehungen; Beziehungen aus der Geometrie und dem Wirtschaftsbereich.

A<sub>2</sub> : Gleichungen der Form  $ax+by=c$  als Graph darstellen und weitere Lösungspaare ablesen. Begriff: Koeffizienten  
Koeffizienten a, b, c aus  $Z$  mit  $|\frac{c}{a}| \leq 10$

A<sub>3</sub> : Sonderfälle der Gleichung  $ax+by = c$  erkennen und als Graph darstellen.

Sonderfälle:  $y=d$  Gerade parallel x-Achse

$x=e$  Gerade parallel y-Achse

$y=kx$  Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems

$y=0$  x-Achse

$x=0$  y-Achse

Lernvoraussetzungen:

- $L_1$  : Wertetabellen für funktionale Zusammenhänge darstellen  
 $L_2$  : Den Graph der Funktion  $y=kx+d$  kennen und im Koordinatensystem darstellen

Die folgenden Stundenentwürfe legen den Punkt (4) // Lernerfahrungen sammeln // im heuristischen Schema der Planung und Durchführung des Unterrichts fest. Die anderen Punkte sind <sup>aber</sup> situationsbedingt und daher im allgemeinen nicht fix planbar.

### 1. Stunde

Ziele:  $A_1$  und  $A_2$

#### 1. Einführendes Beispiel:

Eine Baufirma hat einen 3t und einen 2t Lastwagen. Beim Bau eines Hauses sind 20t Aushubmaterial mit vollen Fuhren wegzuführen. Wie können die Wagen eingesetzt werden ?

- Sachverhalt klären; Situationsskizze an der Tafel
- Lösungen erraten lassen
- Text gemeinsam in eine Gleichung übersetzen:  $3x+2y=20$
- Begriffe Grundmenge und Lösungspaar klären
- In Partnerarbeit alle Lösungen ermitteln und den Graphen der Gleichung im Koordinatensystem darstellen.  
Bei Bedarf individuell Lernvoraussetzungen  $L_1$  und  $L_2$  reaktivieren.
- Das Ergebnis der Partnerarbeit zur Kontrolle an der Tafel darstellen.

#### 2. Weitere Textbeispiele. (Buch S.xx, Nr. a, ...) in Partnerarbeit lösen lassen.

Anmerkung: Die Anzahl der zu lösenden Beispiele richtet sich nach dem Lernfortschritt der Klasse.

#### 3. Partnerarbeit: Gleichungen über $Z \times Z$

$x+12y=20$  ; ..... bzw. Aufgabennummern des Lehrbuches

Arbeitsauftrag: 10 Lösungspaare ermitteln und den Graphen der Gleichung darstellen. Weitere Lösungspaare an Hand des Graphen ablesen.

Bei Bedarf werden den Schüler individuelle Hilfen angeboten.

4. Zusammenfassung und weitere Erläuterungen des Lehrers
  - Ergebnisse der Partnerarbeit darstellen
  - Begriffe: lineare Gleichung mit zwei Variablen, Koeffizienten, Grundmenge, Lösungspaar, Lösungsmenge wiederholen bzw. klären.
5. Hausübung: Beispiele aus dem Lehrbuch zu
  - Punkt 2): 2 Beispiele S.xx Nr. a,b
  - Punkt 3): 2 Beispiele S.xx Nr. c,d

Trotz einer gewissen Detailliertheit des Unterrichtsentwurfes kann er als "offen" bezeichnet werden. Er legt keinen starren Handlungsablauf fest, in der Phase des Unterrichtens können neue Ziele entdeckt, alte variiert oder präzisiert werden.

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, daß die Ziele  $A_1$  und  $A_2$  die Leitziele der Unterrichtsstunde sind und daß jedes Ziel als ein dynamisches mehrdimensionales Beziehungsgefüge mit kognitiven, emotionalen, sozialen, psychomotorischen u.a. Angelhaken aufzufassen ist und daher nicht isoliert im Erziehungsfeld steht. Bei der Überprüfung der Ziele kann auch nur die eine oder andere Dimension zu Prüfungsaufgaben operationalisiert werden. Lehrziele anzustreben bzw. zu realisieren darf nicht mit dem Überprüfen der Lehrziele verwechselt werden. Es darf und wird auch vieles gelernt, was nicht geprüft werden kann.

So haben die Sachaufgaben, die in Partnerarbeit gelöst werden, sicher neben kognitiven auch emotionale und soziale Angelhaken. Lernen zu zweit kann angenehmer und motivierender sein, miteinander Probleme zu lösen, einander Hilfen geben, Meinungsverschiedenheiten zu klären oder verschiedene Meinungen akzeptieren sind Dimensionen des angestrebten Zieles.

Bei der Lösung einer Gleichung über  $Z \times Z$  kann sich unmittelbar aus dem Unterrichtsgeschehen die Frage der Lösungen über  $Q \times Q$  bzw.  $R \times R$  ergeben und in weiterer Folge Fragen über Eigenschaften der rationaler und reellen Zahlen. In diesem Falle wird das Beziehungsgefüge des Lehrzieles in Richtung der kognitiven Dimension erweitert.

Auch der Handlungsablauf ist offen. So könnte das Reaktivieren der Lernvoraussetzungen  $L_1$  und  $L_2$  ein größeres zeitliches Ausmaß beanspruchen, so daß nur noch Punkt 2 des Unterrichtsentwurfes bewältigt werden kann. In diesem Falle muß die Hausübung geändert werden, die Punkte 3 und 4 bleiben einer weiteren Unterrichtsstunde vorbehalten. Die geleistete Planungsarbeit ist deswegen nicht vergebens, der Handlungsentwurf bleibt in groben Zügen erhalten, er verhindert unnötige Verzettelungen und ist dennoch offen für das "Hier und Jetzt" des Geschehens im Unterricht. In dieser situativen Bedingtheit hat der Lehrer Entscheidungen im Rahmen des Handlungsentwurfes zu fällen.

Ein schriftlich fixierter Unterrichtsentwurf ermöglicht nach der Durchführung des Unterrichtes, darüber zu reflektieren und führt so zu einer sukzessiven Kompetenzerweiterung des Lehrers. Außerdem können verschiedene Unterrichtsentwürfe miteinander verglichen werden.

Mit zunehmender Unterrichtserfahrung und Kompetenz kann der schriftlich fixierte Unterrichtsentwurf auch kürzer ausfallen, vor allem wenn der Lehrer die Mittel für den Handlungsablauf, wie Vorwissen reaktivieren, Lernkontrollen durchführen, Gruppen- oder Partnerarbeit organisieren, Aufgaben stellen u.v.a., in seinem methodischen Fähigkeiteninventar zur Verfügung hat und auch in fachlicher Hinsicht mit dem "Lehrstoff" vertraut ist. Als Minimum der Planung ist aber das Festlegen der Ziele und die Auswahl von geeigneten Aufgaben aus dem verwendeten Lehrbuch anzusehen.

Auch das Ausrechnen des einen oder anderen Beispiels hilft weitere Lernschwierigkeiten zu erkennen und vermeidet so unliebsame Überraschungen.

Unter den oben genannten Bedingungen ist der folgende schriftlich niedergelegte Unterrichtsentwurf als Minimum möglich:

Ziele:  $A_1$  und  $A_2$

1. Einführendes Beispiel: Buch S.xx, Nr. a  
Lernvoraussetzungen  $L_1$  und  $L_2$  reaktivieren
2. Partnerarbeit: Aufgaben Nr. ....
3. Partnerarbeit: Aufgaben Nr. ....
4. Zusammenfassung und Begriffe : Lineare Gleichung mit zwei Variablen, Koeffizienten, Grundmenge, Lösungspaar, Lösungsmenge.
5. Hausübung: Aufgaben Nr. ....

2. Stunde

Ziel :  $A_3$

1. Besprechung der Hausübung

- Die Lösungen der Beispiele auf Overheadfolien vorbereitet werden den Schülern vorgestellt
- Die Schüler kontrollieren die Hausübung selbst
- Aufgetretene Fehler werden besprochen

2. Lernkontrolle zu  $A_2$

- Individuell: Über  $Z \times Z$  Graphen zeichnen und 5 Lösungspaare bestimmen  $-3x+2y=12$
- Die Schüler kontrollieren die Aufgaben wechselseitig
- Lehrer stellt die Schüler mit fehlerhaften Lösungen fest und klärt mit diesen die Fehler

3. Informationsdarbietung in der Form eines Lehrer-Schüler-Gespräches zu  $A_3$

- Sonderfälle von  $ax+by=c$  graphisch darstellen und weitere Lösungspaare bestimmen.
- Sonderfälle durch "Nullsetzen" der Koeffizienten entwickeln

$$0 \cdot x - 3y = 6 \quad \longrightarrow \quad y = -2$$

$$2x + 0 \cdot y = 8 \quad \longrightarrow \quad x = 4$$

$$3x - 2y = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{3}{2} x$$

$$0 \cdot x + 5y = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0$$

$$4x + 0 \cdot y = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$$

- Grundmenge zuerst  $Z \times Z$ , dann eventuell auf  $Q \times Q$  erweitern (Verwendung des Taschenrechners)

4. Individuelles Lösen von Aufgaben, wobei die Schüler gegenseitig Informationen austauschen dürfen. Der Lehrer selbst gibt individuelle Lernhilfen.

Aufgabenblock zu den 5 Sonderfällen, die in der "Nullform" wie Punkt 3) angegeben sind: Seite xx, Nr. a, b, c, d, e

- Lösungen zusammenfassend darstellen

5. Hausübung: Aufgabenblock wie in Punkt 3) dargestellt

Buch Seite xx, Nr. a, b, c, d, e

### Anmerkungen

1. Im Sinne eines offenen Handlungsentwurfes ist zu berücksichtigen, daß nach der Besprechung der Hausübung und der Durchführung der Lernkontrolle der größere Teil der Klasse das Lehrziel nicht erreicht haben könnte. In diesem Falle müßte die Planung umgestellt werden, um die Lerndefizite zu beheben. Da die Lerndefizite individuell verschieden sein können, müssen sie auch individuell behoben werden. Hier könnten bereits kompetente Schüler Helferdienste übernehmen.
2. Die obigen Ausführungen legen es auch nahe, die Hausübung unmittelbar zu überprüfen und nicht die Hefte einzusammeln und für die nächste Unterrichtsstunde zu korrigieren. Das Lehrziel  $A_3$  setzt das Lehrziel  $A_2$  voraus. Es gilt daher bei der Stellung von Hausübungen ihre unmittelbare Kontrolle mitzudenken.
3. Zur Erreichung des Zieles  $A_3$  habe ich mich aus Zeitersparnisgründen für die Informationsdarbietung in Form des Lehrer-Schüler-Gespräches entschieden. Natürlich sind auch andere Sozialformen möglich, insbesondere die Gruppenarbeit. So könnte der Aufgabenblock in Punkt 3) mit folgendem Arbeitsauftrag Vierergruppen vorgelegt werden: Bestimmt jeweils 10 ganzzahlige Lösungspaare und stellt die Gleichungen graphisch dar!
4. Zielerweiterungen sind beim Erweitern der Grundmenge  $Z \times Z$  auf  $Q \times Q$  und bei der Verwendung des Taschenrechners möglich. Auch beim Rechnen mit der Zahl "0" und "1" kann von einer Variation des Zieles gesprochen werden.
5. Der minimale schriftlich niedergelegte Unterrichtsentwurf ist unter den bereits angeführten Bedingungen dem auf Seite 14 analog.



### 3. Stunde

Ziele:  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  - Übung, Festigung und Anwendung

#### 1. Besprechung der Hausübung

- Jeweils ein Schüler erläutert an der Tafel die Durchführung einer Aufgabe, die andern vergleichen ihre Lösungen damit
- Aufgetretene Fehler werden besprochen

#### 2. Übung in Gruppen- und Partnerarbeit

- Schüler annähernd gleicher Leistungsfähigkeit bilden Gruppen mit zwei oder drei Mitgliedern
- Differenzierte Aufgaben den Gruppen vorgeben und lösen lassen (Lehrbuchaufgaben bzw. selbst erstellte Aufgaben)
- Lehrer gibt Gruppen individuell Hilfestellungen bei Lernschwierigkeiten
- Ist eine Gruppe mit der Aufgabe fertig, erhält sie für die Selbstkontrolle die auf einem Zettel vorbereitete Lösung
- Die Aufgaben können auch zwischen den Gruppen ausgetauscht werden

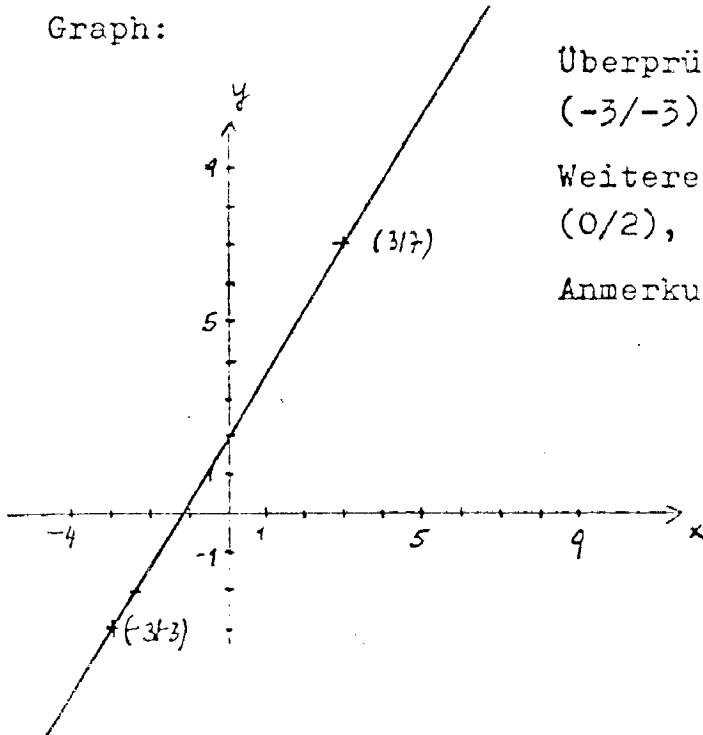
Gruppenarbeit mit höherem Leistungsniveau:

- 1) Das 5-fache einer Zahl ist um 6 kleiner als das 3-fache einer zweiten Zahl.
  - a) Stellt eine Gleichung auf!
  - b) Bestimmt 5 ganzzahlige Lösungspaare und zeichnet den Graphen der Gleichung!
- 2) Gebt die Gleichungen folgender Geraden an!  
Die Gerade geht durch den Punkt  $P(4/-3)$  und
  - a) ist parallel zur y-Achse
  - b) ist parallel zur x-Achse
  - c) geht auch den Koordinatenursprung.
- 3) Gebt zu den Beispielen der Aufgabe 2) jeweils drei weitere Punkte an, die auf der Geraden liegen!

Lösungskarte für diese Gruppenbeispiele:

1) Gleichung:  $5x + 6 = 3y$  oder  $5x = 3y - 6$

Graph:



Überprüft, ob die Punkte  $(3/7)$  und  $(-3/-3)$  auf eurer Geraden liegen.

Weitere mögliche Lösungspaare:  
 $(0/2)$ ,  $(6/12)$ ,  $(9/15)$ ,  $(-6/8)$

Anmerkung: Die Zeichnung könnte auch entfallen, da die Überprüfung durch die Punkte  $(3/7)$  und  $(-3/-3)$  genügt.

2) a)  $x = 4$     b)  $y = -3$     c)  $y = -\frac{3}{4}x$

3) a) Bei den Lösungspaaren ist die erste Zahl immer 4, die zweite kann beliebig sein.

b) Bei den Lösungspaaren kann die erste Zahl beliebig sein, die zweite ist immer  $-3$ .

c) Mögliche Lösungspaare:  $(0/0)$ ,  $(4/-3)$ ,  $(8/-6)$ ,  $(-4/3)$

Gruppenarbeit mit niedrigerem Leistungsniveau:

1) Ein Kaufmann packt Kartoffeln in 2kg und 5kg-Säcken ab. Er will insgesamt 32 kg Kartoffeln abpacken. Wieviele Säcke kann er von jeder Sorte nehmen?

a) Stellt eine Gleichung auf!

b) Stimmt die vier möglichen Lösungspaare!

2) Zeichnet den Graphen der Gleichung und gebt 10 ganzzahlige Lösungspaare an!

a)  $x + 3y = 6$

b)  $-3x + 2y = 6$

3) Zeichnet den Graphen der folgenden Gleichungen!

a)  $x = 3$

b)  $y = 4$

c)  $x = 0$

Eine Lösungskarte kann analog dem obigen Beispiel erstellt werden.

3. Hausübung: Aufgaben aus dem Lehrbuch oder noch nicht bearbeitete Aufgaben anderen Gruppen.

Anmerkungen zum Unterrichtsentwurf:

- Die Vorbereitung einer Übungsstunde besteht vor allem in der Auswahl und Differenzierung von Aufgaben zu den festgelegten Lehrzielen.
- Für die Übung in Partner oder Gruppenarbeit ist es zweckmäßig, sich im Laufe der Zeit eine Kartei mit Aufgaben und Lösungen, wie es oben dargestellt ist, zu erstellen, diese dann nach einem ersten Durchlauf vor allem in Hinsicht auf das Leistungsniveau zu modifizieren.
- Das selbständige Überprüfen der Gruppenergebnisse an Hand einer Lösungskarte hat eine wichtige didaktische Funktion
  - Die Schüler werden zum Reflektieren über ihre Tätigkeit angehalten
  - Mit dem eigenen "Fehlerfinden" ist meistens auch eine Behebung der Fehler verbunden
  - Erkenntnisse und Lösungswege über die unmittelbare Erfolgskontrolle besser verspeichert
  - Es erschließen sich neue Erkenntnisse und Verfahren, etwa wie man selbst eine Lösungskontrolle durchführen kann.
- Der minimale schriftlich niedergelegte Unterrichtsentwurf:
  1. Besprechung der Hausübung
  2. Übung in Gruppenarbeit: Die Aufgaben für die Gruppenarbeiten sind auszuwählen und Lösungskarten zu erstellen.
  3. Hausübung: Aufgaben .....

Literatur

- BECKER, G. und CLEMENS-LODDE, B. und KOHL, K.: Unterrichtssituationen, Urban&Schwarzenberg, München-Wien-Baltimore 1980
- COHN, R.: Von der Psychoanalyse zur themenzentrierten Interaktion, Klett-Cotta, Stuttgart 1975
- DÖRNER, D.: Problemlösen als Informationsverarbeitung, Kohlhammer, Stuttgart-Berlin-Köln-Mainz 1979
- RATH, I.: Carl R. Rogers: Die Kraft des Guten, in: Mathematik im Unterricht, Salzburg 1981 , Nr.3
- RATH, I.: Aspekte und Thesen zur Leistungsbeurteilung, in: Mathematik im Unterricht, Salzburg 1983 a, Nr.5
- RATH, I.: Handlungsorientierte Lehrerfortbildung am Thema "Lehrzielbezogene Unterrichtsplanung", Dissertation Salzburg 1983 b , in Vorbereitung
- RATH, I.: Was soll und kann ich wie überprüfen ? - Prüfungsaufgaben, in: Mathematik im Unterricht, Salzburg 1983 c, Nr. 6